第27卷 第5期
2010年10月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 5
Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0894-07

不定整数二次规划的一个新的分支定界算法*

黎健玲[1]， 马 林[1]， 王 鹏[2]

(1- 广西大学数学与信息科学学院，南宁 530004； 2- 海口经济学院基础部，海口 570203)

摘 要: 本文通过正交变换及凹函数的线性下方估计得到不定整数二次规划的可分离形式的连续凸松弛问题，然后利用Lagrangian对偶技术导出该凸松弛问题最优值的Lagrangian对偶下界，再结合超矩形整数对分，建立了一个求解不定整数二次规划新的分支定界算法。最后给出了数值试验对结果进行了比较。

关键词: 不定整数二次规划；凸松弛；Lagrangian对偶界；全局解；分支定界

分类号: **AMS**(2000) 90C20　　**中图分类号**: O221.2　　**文献标识码**: A

1 引言

本文讨论如下不定整数二次规划问题

$$
\begin{aligned}
\text{(IQP)}\qquad & \min\ f(x)=x^TQx+c^Tx\\
& \text{s.t.}\ \ Ax\le b,\\
& \qquad x\in\mathbb{Z}^n,
\end{aligned}
$$

其中$\mathbb{Z}^n$是$\mathbb{R}^n$中的整数向量集合，Q是$n\times n$实对称不定矩阵，A是$m\times n$矩阵，$c\in\mathbb{R}^n$，$b\in\mathbb{R}^m$。我们假设x是有界的

$$
x\in X_I\triangleq\{x\in\mathbb{Z}^n\mid 0<l\le x\le u\},
$$

其中l和u是整数向量。

整数二次规划问题在经济、金融、通信等部门有广泛的应用[1-3]，多年来备受学者们的关注，并取得了一批研究成果[2-6]。不定整数二次规划(IQP)是一个NP难的问题，许多算法是求解该问题的特殊情形，即0-1二次规划问题或二次背包问题[7-11]，相对而言，求解问题(IQP)的算法不是很多。Erenguc和Benson[3]给出了一个分支定界算法，该算法中下界的确定是基于正交变换和凸包络技术。Thoai[4]给出了一个新的分支定界算法，其中下界由求解凹规划确定，分支则采用超矩形整数二分法。孙小玲、黎健玲等[12]讨论了问题(IQP)的几种下界及相互关系。

收稿日期: 2010-03-11. **作者简介**: 黎健玲(1965年1月生)，女，博士，副教授. 研究方向：数学规划.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10771040)；广西科学基金(0728006)；广西大学科研基金(X081016).

2　凸松弛与 Lagrangian 对偶界

考虑问题 (IQP) 的连续松弛

$$(P_c)\qquad \min\ f(x) = x^TQx + c^Tx$$
$$\text{s.t.}\ \ Ax \le b,$$
$$x \in X \triangleq \{\mathbb{R}^n \mid 0 < l \le x \le u\}.$$

显然问题 (P_c) 的最优值是问题 (IQP) 最优值的下界。下面考虑问题 (P_c) 最优值下界的估计。

不失一般性，设 $\lambda_i < 0\,(i = 1,\cdots,p)$，$\lambda_i \ge 0\,(i = p+1,\cdots,n)$，$w_1,\cdots,w_n$ 是对应的特征向量，定义矩阵 $W = (w_1,\cdots,w_n)$，则 $W^TW = E_n$ (E_n 为 n 阶单位阵)，$W^TQW = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。作正交变换 $x = Wy$，则 (P_c) 可等价化为如下可分离形式

$$(P_y)\qquad \min\ h(y) = \sum_{i=1}^{n} h_i(y_i) = \sum_{i=1}^{n}(\widetilde{c}_i y_i + \lambda_i y_i^2)$$
$$\text{s.t.}\ \ \widetilde{A}y \le b,$$
$$l \le Wy \le u,$$

其中

$$h_i(y_i) \triangleq \widetilde{c}y_i + \lambda_i y_i^2,\quad \widetilde{c}_i = c^Tw_i,\quad i = 1,2,\cdots,n,\quad \widetilde{A} = AW.$$

由于 $\lambda_i < 0\,(i = 1,\cdots,p)$，所以问题 (P_y) 仍是非凸的。

对于 $i = 1,\cdots,p$，设 α_i, β_i 分别是 y_i 的下界和上界 (α_i, β_i 的计算方法参见文献 [12])。由于 $\lambda_i < 0\,(i = 1,\cdots,p)$，所以 $h_i(y_i)\,(i = 1,\cdots,p)$ 是凹函数。设 $l_i(y_i)$ 是凹函数 $h_i(y_i)$ 在 $[\alpha_i,\beta_i]$ 上的线性下方估计，则经计算得

$$l_i(y_i) = \widetilde{c}y_i + \lambda_i\alpha_i^2 + \lambda_i(\beta_i + \alpha_i)(y_i - \alpha_i),\quad y_i \in [\alpha_i,\beta_i],\quad i = 1,\cdots,p\,.$$

用 $l_i(y_i)$ 取代问题 (P_y) 目标函数中的 $h_i(y_i)$ 得到如下可分离形式的凸松弛问题

$$(CP_y)\qquad \min\ h(y) = \sum_{i=1}^{p} l_i(y_i) + \sum_{i=p+1}^{n} h_i(y_i)$$
$$\text{s.t.}\ \ \widetilde{A}y \le b,$$
$$l \le Wy \le u.$$

当维数 n 稍大时求解凸松弛问题 (CP_y) 较费时，为此，下面使用 Lagrangian 对偶策略作进一步分析。记 $\omega = (\xi^T,\mu^T,\nu^T)^T$，其中 $\xi \in \mathbb{R}_+^m$，$\mu \in \mathbb{R}_+^n$，$\nu \in \mathbb{R}_+^n$。则由文献 [12] 知，对任意的 $\omega \in \mathbb{R}_+^{m+2n}$，问题 (P_y) 的对偶函数为

$$\begin{aligned} d(\omega)\ =\ & -\xi^Tb + \mu^Tl - \nu^Tu + \sum_{i=1}^{p}\min_{\alpha_i\le y_i\le\beta_i}\left\{h_i(y_i) + (\widetilde{A}_i^T\xi + w_i^T(\nu-\mu))^Ty_i\right\} \\ & + \sum_{i=p+1}^{n}\min_{y_i\in\mathbb{R}}\left\{h_i(y_i) + (\widetilde{A}_i^T\xi + W_i^T(\nu-\mu))^Ty_i\right\}, \end{aligned}$$

对于$i=1,2,\cdots,p$, $h_i(y_i)+(\widetilde{A}_i^T\xi+w_i^T(\nu-\mu))^Ty_i$在$[\alpha_i,\beta_i]$上是凹函数，于是有

$$\begin{aligned}&\min_{\alpha_i\le y_i\le\beta_i}\left\{h_i(y_i)+(\widetilde{A}_i^T\xi+w_i^T(\nu-\mu))^Ty_i\right\}\\=\ &\min\left\{h_i(\alpha_i)+(\widetilde{A}_i^T\xi+w_i^T(\nu-\mu))^T\alpha_i,h_i(\beta_i)+(\widetilde{A}_i^T\xi+w_i^T(\nu-\mu))^T\beta_i\right\}.\end{aligned}$$

对于$i=p+1,\cdots,n$, $h_i(y_i)+(\widetilde{A}_i^T\xi+w_i^T(\nu-\mu))^Ty_i$是凸二次函数，于是得到

$$\begin{aligned}&\min_{y_i\in\mathbb{R}}\left\{h_i(y_i)+(\widetilde{A}_i^T\xi+w_i^T(\nu-\mu))^Ty_i\right\}\\=\ &\min_{y_i\in\mathbb{R}}\left\{\lambda_iy_i^2+((\widetilde{A}_i^T\xi+w_i^T(\nu-\mu))^T+\widetilde{c}_i)y_i\right\}=-\frac{[(\widetilde{A}_i^T\xi+w_i^T(\nu-\mu))^T+\widetilde{c}_i]^2}{4\lambda_i}.\end{aligned}$$

由弱对偶定理知$d(\omega)\le v(P_y)$，进而$d(\omega)\le v(IQP)$，其中$v(\cdot)$表示问题$(\cdot)$的最优值。于是为得到最好的下界，我们考虑Lagrangian对偶问题为

$$(D)\qquad\max_{\omega\in\mathbb{R}_+^{m+2n}}d(\omega).$$

由文献[12]知下面结论成立。

定理2.1 $v(CP_y)=v(D)$。

上述定理表明连续凸松弛产生的下界与Lagrangian对偶下界是相等的。但由于当维数n较大时解凸二次规划(CP_y)较费时，所以在下面给出的算法中我们是利用解Lagrangian对偶问题(D)确定下界。

因为对偶函数$d(\omega)$是逐段线性凹函数，所以对偶问题(D)是非光滑优化问题，可用次梯度法求解。

3 分支定界算法

本节我们详细给出求解问题(IQP)的新算法。新算法是一个分支定界算法，问题(IQP)最优值的下界由上一节导出的Lagrangian对偶界确定，上界则由算法迭代过程中产生的可行点的目标函数值给出，而区域的剖分则使用超矩形整数二分法[4]。为方便起见，下面对超矩形整数二分法作简要介绍。

3.1 超矩形整数二分法

设$P=\langle a,b\rangle\subset\mathbb{R}^n$是一个有整数边界的超矩形，即

$$\begin{aligned}P\ &=\ \left\{x\in\mathbb{R}^n\mid a\le x\le b\right\}\\&=\ \left\{x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n\mid\ a_j\le x_j\le b_j,\ j=1,2,\cdots,n\right\},\end{aligned}$$

其中a_j, $b_j\ (j=1,2,\cdots,n)$是整数。令$\widehat{i}$为当前迭代的分支指标，将P剖分为两个新子箱

$$P^1=\left\{x\in P\mid a_{\widehat{i}}\le x_{\widehat{i}}\le\eta\right\},\quad P^2=\left\{x\in P\mid \eta+1\le x_{\widehat{i}}\le b_{\widehat{i}}\right\},$$

其中$\eta=\lfloor(a_{\widehat{i}}+b_{\widehat{i}})/2\rfloor$, $\lfloor t\rfloor$表示不大于t的最大的整数。显然有

$$P^1\cup P^2\subset P,\quad P^1\cap P^2=\emptyset,\quad (P^1\cap Z^n)\cup(P^2\cap Z^n)=P\cap Z^n,$$

称 P^1, P^2 为 P 的整数对分。

3.2 算法

在新算法中，每个子问题 (子箱) 对应于搜索树的一个节点，通过解初始箱子 $\langle l,u\rangle$ 上的对偶问题得到初始下界。算法用一链表保存子箱，进入第 k 次迭代时，从该链表选取下界最小的子箱并剖分为两个新子箱，对每个新子箱，通过解对偶问题得到下界，若该下界小于问题 (QIP) 的上界，则将该新子箱存入链表中。利用剖分过程中产生的可行点的目标函数值更新上界。该过程一直重复下去直到链表等于空集为止。

算法 A

步骤 0 (初始步)　给定精度 $\varepsilon > 0$。计算矩阵 Q 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$。令 $P_1 = \langle l,u\rangle$，用次梯度法解对偶问题 (D)，并令初始下界 $LB = v(D)$。若初始箱子 P_1 的某个顶点为可行点 (记为 x^1)，则令初始上界 $UB = f(x^1)$, $S = \{x^1\}$，否则令初始上界 $UB = +\infty$, $S = \emptyset$。令 $\Gamma = \{P_1\}$, $k = 1$。

步骤 1 (剖分)　利用超矩形整数二分法将 P_k 剖分为两个子箱 P_k^1, P_k^2，并从 Γ 中删除 P_k。令 $i = 1$。

步骤 2 (定界)　求解对应于 P_k^i 的对偶问题 (D) 得下界 $LB(P_k^i)$。若 $LB(P_k^i) < UB - \varepsilon$，则将 P_k^i 添加进 Γ 中。利用剖分过程产生的问题 (IQP) 的可行点更新集合 S。若 $i = 2$ 且 $S \neq \emptyset$，则令 $UB = \min\{f(x) \mid x \in S\}$，且取 $x^{k+1} \in S$，使 $f(x^{k+1}) = UB$，转步骤 3，否则令 $i = i+1$，重复步骤 2。

步骤 3 (终止性判断)　将 Γ 中下界大于当前上界 UB 的子箱删除。如果 $\Gamma = \emptyset$，停止，x^{k+1} 是问题 (IQP) 的最优解，否则从 Γ 中选取具有最小下界的子箱 (记为 P_{k+1})。令 $k := k+1$，返回步骤 1。

注 3.1　在上述算法的步骤 1 中，我们沿子箱最长边的中点经取整后对子箱进行剖分。

注 3.2　因问题 (IQP) 的可行集落在初始箱子 $\langle l,u\rangle$ 中，所以经有限次超矩形对分后所得子箱的某些顶点一定是可行点，从而算法经有限次迭代后步骤 2 中的 S 必非空。

因为 X 是有界集合，所以根据整数规划分支定界算法理论，我们不难证明下面结论成立。

定理 3.1　算法 A 经有限步迭代后可得到问题 (IQP) 的最优解。

4　例子

本节通过一个小例子来说明算法 A 的实现过程。

例

$$\begin{aligned}
\min\ & f(x) = -x_2^2 - 2x_1x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \le 5, \\
& 0 \le x_1 \le 5, \quad 0 \le x_2 \le 2, \\
& x = (x_1,\ x_2)^T \in \mathbb{Z}^2,
\end{aligned}$$

该问题的最优解为 $x^* = (1,2)^T$，最优值为 $f(x^*) = -8$。此问题的可行域如图 1 所示。

第一次迭代

步骤 0　给定 $\varepsilon = 0.001$, $l = (0,0)^T$, $u = (5,2)^T$。经计算得特征值

$$\lambda_1 = -1.6185, \quad \lambda_2 = 0.6185.$$

令 $P_1=\langle l,u\rangle$，解对偶问题 (D) 得到初始下界 $LB=v(D)=-9.529$。在解对偶问题过程中得到可行点 $x^1=(2,1)^T$，于是令 $S=\{(2,1)^T\}$，初始上界 $UB=f(x^1)=-5$。令 $\Gamma=\{P_1\}$。

步骤1 箱子 P_1 的平行于 x_1 轴的边较长 (长度为 5)，所以沿该边在 $\eta=\lfloor\frac{0+5}{2}\rfloor=2$ 处应用整数二分法将 P_1 剖分为下列两个子箱

$$P_1^1=\big\langle(0,0)^T,(2,2)^T\big\rangle,\quad P_1^2=\big\langle(3,0)^T,(5,2)^T\big\rangle,$$

解相应的对偶问题得下界 $LB(P_1^1)=-8.895$ 和 $LB(P_1^2)=-5.178$；由于

$$LB(P_1^1)<UB,\quad LB(P_1^2)<UB,$$

因此把 P_1^1,P_1^2 添加进 Γ 中，同时将 P_1 从 Γ 中删除，于是 Γ 变为

$$\Gamma=\big\{\Gamma\backslash\{P_1\}\big\}\bigcup\big\{P_1^1,P_1^2\big\}=\big\{P_1^1,P_1^2\big\}=\big\{\langle(0,0)^T,(2,2)^T\rangle,\langle(3,0)^T,(5,2)^T\rangle\big\}.$$

步骤2 在此过程中不需更新上界 UB，即 $UB=-5$。从 Γ 中取出下界最小的子箱 P_1^1，令 $P_2=P_1^1=\langle(0,0)^T,(2,2)^T\rangle$。

该次迭代过程见图 2 所示。

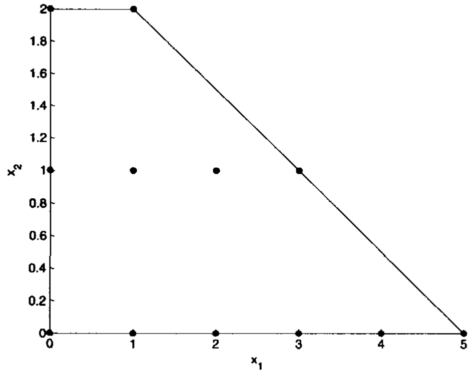

图 1: 可行域

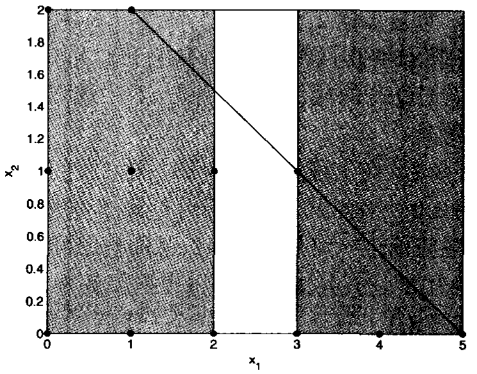

图 2: 第一次迭代

第二次迭代

步骤1 因为子箱 P_2 的两条边一样长，我们沿平行于 x_1 轴的边在 $\eta=\lfloor\frac{0+2}{2}\rfloor=1$ 处应用整数二分法把 P_2 剖分为下列两个子箱

$$P_2^1=\big\langle(0,0)^T,(1,2)^T\big\rangle,\quad P_2^2=\big\langle(2,0)^T,(2,2)^T\big\rangle.$$

将 P_2 从 Γ 中删除，于是 Γ 变为

$$\Gamma=\Gamma\backslash\{P_2\}=\{P_1^2\}=\big\{\langle(3,0)^T,(5,2)^T\rangle\big\}.$$

步骤2 解相应的对偶问题得下界 $LB(P_2^1)=-7.736$ 和 $LB(P_2^2)=-4.228$；由于 $LB(P_2^1)<UB$，$LB(P_2^2)>UB$，所以只需把 P_2^1 添加进 Γ 中，于是 Γ 变为

$$\Gamma=\Gamma\bigcup\{P_2^1\}=\{P_2^1,P_1^2\}=\big\{\langle(0,0)^T,(1,2)^T\rangle,\ \langle(3,0)^T,(5,2)^T\rangle\big\}.$$

在此过程中得到可行点 $\hat{x}=(1,2)^T$，所以集合 S 更新为

$$S = S\bigcup\{(1,2)^T\} = \{(2,1)^T,(1,2)^T\},$$

令新上界

$$UB = \min\{f(x) \mid x \in S\} = f(\hat{x}) = -8,$$

令 $x^2=\hat{x}$。因 $LB(P_2^1) > UB$，$LB(P_1^2) > UB$，所以将 P_2^1，P_1^2 从 Γ 中删除，于是 $\Gamma=\emptyset$。

步骤3　因 $\Gamma=\emptyset$，所以算法终止，$x^2=(1,2)^T$ 即为问题 (IQP) 的最优解，最优值为 $f(x^2) = -8$。该次迭代过程见图3所示。

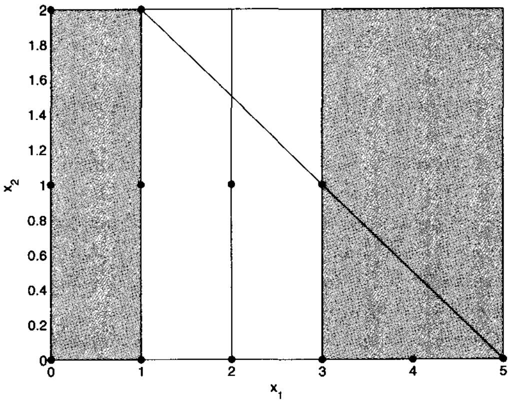

图 3:　第二次迭代

5　数值试验

为了检验算法A的可行性和有效性，我们使用Fortran 90编写程序在计算机Aspire-4710G-4A0508CI PC上运行，该计算机的配置为IntelCore^{TM} 双核处理器T2450 (2.0 GHz, 2MB L2 cache) 以及1.0G DDR2内存。测试问题是随机生成的。在数值试验中，我们将本文的算法A (简记为Algo A) 与文献[4]中的算法2 (简记为Algo B) 作比较，数值结果见表1，表中的平均CPU时间和平均迭代次数是测试了10个问题得到的。数值结果表明我们提出的算法是有效和可行的，能在合理的时间内求解中等规模的 (IQP) 问题，对同一问题，算法A的运行时间比算法B少，且能求解的问题的规模要比算法B所求解的问题规模大。

表1:　数值结果

n	m	Aver−CPU Time (Seconds)		Aver−iteration	
		Algo B	Algo A	Algo B	Algo A
5	3	0.137	0.112	4	4
10	6	0.546	0.462	8	6
15	7	1.746	2.813	8	6
20	13	22.25	18.17	11	15
25	8	–	27.33	–	122
30	8	–	33.27	–	97
35	7	–	60.02	–	116

参考文献：

[1] Lazimy R. Mixed-integer quadratic programming[J]. Mathematical Programming, 1982, 22: 332-349
[2] Li D, Sun X L, Wang F L. Convergent Lagrangian and contour-cut method for nonlinear integer programming with a quadratic objective function[J]. SIAM Journal on Optimization, 2006, 17: 372-400
[3] Erenguc S S, Benson H P. An algorithm for indefinite integer quadratic programming[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1991, 21: 99-106
[4] Thoai N V. Global optimization techniques for solving the general quadratic integer programming problem[J]. Computational Optimization and Applications, 1998, 10: 149-163
[5] Li D, Sun X L. Nonlinear Integer Programming[M]. New York: Springer, 2006
[6] 黎健玲. 连续与离散单调优化和不定二次规划算法的研究[D]. 上海大学博士学位论文，2007
Li J L. Algorithmic studies on continuous and discrete monotone optimization and indefinite quadratic programming[D]. Doctoral Dissertation of Shanghai University, 2007
[7] Gallo G, Hammer P L, Simeone B. Quadratic knapsack problems[J]. Mathematical Programming Study, 1980, 12: 132-149
[8] Poljak S, Wolkowica H. Convex relaxations of 0-1 quadratic programming[J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20: 550-561
[9] Beck A, Teboulle M. Global optimality conditions for quadratic optimization problems with binary constraints[J]. SIAM Journal on Optimization, 2000, 11: 179-188
[10] Billionnet A, Soutif E. An exact method based on Lagrangian decomposition for the 0-1 quadratic knapsack problem[J]. European Journal of Opertional Research, 2004, 157: 565-575
[11] Helmberg C, Rendl F, Weismantel R. A semidefinite programming approach to the quadratic knapsack problem[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2000, 4: 197-215
[12] Sun X L, Li J L, Luo H Z. Convex relaxation and Lagrangian decomposition for indefinite quadratic integer programming[J]. Optimization, 2010, 59(5): 627-641

A New Branch and Bound Algorithm for Indefinite Integer Quadratic Programs

LI Jian-ling[1], MA Lin[1], WANG Peng[2]

(1- College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004;
2- Department of Basic Course, Haikou College of Economics, Haikou 570203)

Abstract: With the help of the orthogonal transformation and the linear underestimation of a concave function, we first obtain a separable and continuous convex relaxation problem of the indefinite integer quadratic programming, and then the Lagrangian dual lower bound of the optimal value of the convex relaxation is derived by using the Lagrangian dual technique. Combining with integral hyper-rectangular bisection, a new branch and bound algorithm is presented. Finally, preliminary numerical results are reported.

Keywords: indefinite integer quadratic programming; convex relaxation; Lagrangian dual bound; global solution; branch and bound

Received: 11 Mar 2010. **Accepted:** 26 May 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10771040); the Guangxi Science Foundation (0728006); the Scientific Research Foundation of Guangxi University (X081016).